Лекция №7. Алгебра Жегалкина.

Цели:

знать: способы задания булевых функций в алгебре Жегалкина.

уметь: представлять булевы функции в виде канонического многочлена Жегалкина, устанавливать линейность функций.

развить способность: к решению задач, осуществлению поиска информации.

Основные термины: сложение по модулю 2, базис Жегалкина, канонический многочлен Жегалкина, линейные функции.

План:

1. Алгебра Жегалкина.
2. Представление булевых функций многочленом Жегалкина.

Изложение материала.

Выше было доказано, что система $\{\oplus, \wedge, 1\}$ является функционально полной. Базис $\{\oplus, \wedge, 1\}$ называется **базисом Жегалкина**.

Определение. Алгебра логических функций в базисе, состоящем из функций $\{\oplus, \wedge, 1\}$, называется **алгеброй Жегалкина**.

В алгебре Жегалкина остаются справедливыми все основные свойства булевых функций, а также:

$x \oplus y = y \oplus x$ (коммутативность);

$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$ (ассоциативность);

$x(y \oplus z) = xy \oplus xz$ (дистрибутивность);

$x \oplus x = 0$;

$x \oplus 0 = x$.

Согласно основным равносильностям: $x \oplus y = x\bar{y} \vee \bar{x}y$.

Тогда имеем:

$x \oplus 1 = x\bar{1} \vee \bar{x}1 = x0 \vee \bar{x}1 = 0 \vee \bar{x} = \bar{x}$, т.е.

$$\bar{x} = x \oplus 1.$$

$x \vee y = \overline{\bar{x}\,\bar{y}} = \bar{x}\,\bar{y} \oplus 1 = (x \oplus 1)(y \oplus 1) \oplus 1 = xy \oplus x \oplus y \oplus 1 \oplus 1 = xy \oplus x \oplus y \oplus 0 =$
$= xy \oplus x \oplus y$, т.е.

$$x \vee y = xy \oplus x \oplus y.$$

Если $xy = 0$, то $x \vee y = x \oplus y$. Поэтому, когда исходная формула – СДНФ, мы можем выполнить эквивалентное преобразование, заменив дизъюнкцию сложением по модулю 2.

Если в произвольной формуле алгебры Жегалкина раскрыть скобки и произвести все возможные упрощения, то получится формула в виде полинома по модулю 2 (сумма произведений).

Определение. Формула, имеющая вид суммы (по модулю два) произведений, в которой каждое слагаемое является константой 0 или 1 либо одной из переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, либо конъюнкцией нескольких переменных, называется **многочленом Жегалкина** от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Обозначается $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Многочлен Жегалкина от двух переменных x и y имеет вид

$P(x, y) = c_0 \oplus c_1 x \oplus c_2 y \oplus c_3 xy$, где коэффициенты $c_i \in \{0;1\}, i = 0,1,2,3$.

Многочлен Жегалкина от трех переменных x, y и z имеет вид

$P(x, y, z) = c_0 \oplus c_1 x \oplus c_2 y \oplus c_3 z \oplus c_4 xy \oplus c_5 xz \oplus c_6 yz \oplus c_7 xyz$,

где коэффициенты $c_i \in \{0;1\}, i = 0, \ldots, 7$.

Количество коэффициентов в многочлене Жегалкина от n переменных равно числу 2^n. Каждый коэффициент может принимать два значения – 0 и 1. Следовательно, различных многочленов Жегалкина столько же, сколько булевых функций от n переменных, т.е. $2^{\left(2^n\right)}$.

Теорема (Жегалкина). Любую булеву функцию можно представить в виде многочлена Жегалкина, причем единственным образом (каноническое представление).

Рассмотрим основные способы нахождения многочлена Жегалкина.

1. Метод неопределенных коэффициентов.

Метод неопределенных коэффициентов целесообразно использовать для функций небольшого числа переменных $(n \le 3)$.

Пусть задана булева функция двух переменных $f(x, y)$. Тогда в общем виде многочлен Жегалкина будет записан так: $P(x, y) = c_0 \oplus c_1 x \oplus c_2 y \oplus c_3 xy$. Так как значения многочлена совпадают со значениями функции $f(x, y)$, то получаем:

$$P(00) = c_0 \oplus c_1 0 \oplus c_2 0 \oplus c_3 00 = c_0 = f(00);$$
$$P(01) = c_0 \oplus c_1 0 \oplus c_2 1 \oplus c_3 01 = c_0 \oplus c_2 = f(01);$$
$$P(10) = c_0 \oplus c_1 1 \oplus c_2 0 \oplus c_3 10 = c_0 \oplus c_1 = f(10);$$
$$P(11) = c_0 \oplus c_1 1 \oplus c_2 1 \oplus c_3 11 = c_0 \oplus c_1 \oplus c_2 \oplus c_3 = f(11).$$

Имеем систему из четырех булевых уравнений:

$$\begin{cases} c_0 = f(00), \\ c_0 \oplus c_2 = f(01), \\ c_0 \oplus c_1 = f(10), \\ c_0 \oplus c_1 \oplus c_2 \oplus c_3 = f(11). \end{cases}$$

Решая систему, последовательно определим все коэффициенты многочлена Жегалкина.

Пример. Построить многочлен Жегалкина для функции $f(x,y) = xy \leftrightarrow (\bar{x} \vee y)$.

Решение. Составим таблицу истинности данной функции.

x	y	xy	$\bar{x}$	$\bar{x} \vee y$	$xy \leftrightarrow (\bar{x} \vee y)$
0	0	0	1	1	0
0	1	0	1	1	0
1	0	0	0	0	1
1	1	1	0	1	1

Таким образом, $f(00) = 0, f(01) = 0, f(10) = 1, f(11) = 1$.

Запишем систему булевых уравнений

$$\begin{cases} c_0 = 0, \\ c_0 \oplus c_2 = 0, \\ c_0 \oplus c_1 = 1, \\ c_0 \oplus c_1 \oplus c_2 \oplus c_3 = 1. \end{cases}$$

Подставим $c_0 = 0$ во второе уравнение: $0 \oplus c_2 = 0$, откуда находим, что $c_2 = 0$. Подставим $c_0 = 0$ в третье уравнение: $0 \oplus c_1 = 1$, откуда находим, что $c_1 = 1$. Теперь подставим $c_0 = 0$, $c_1 = 1$ и $c_2 = 0$ в последнее уравнение: $0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus c_3 = 1$, $1 \oplus 0 \oplus c_3 = 1$, $1 \oplus c_3 = 1$, и, значит, $c_3 = 0$.

Запишем многочлен Жегалкина от двух переменных с найденными коэффициентами $c_0 = 0$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$:

$$P(x,y) = 0 \oplus 1x \oplus 0y \oplus 0xy.$$

Упростим его: $P(x,y) = 0 \oplus x \oplus 0 \oplus 0 = x \oplus 0 \oplus 0 = x \oplus 0 = x$.

Окончательно, $P(x,y) = x$.

Пусть задана булева функция трех переменных $f(x,y,z)$. Тогда в общем виде многочлен Жегалкина будет записан так:

$$P(x,y,z) = c_0 \oplus c_1 x \oplus c_2 y \oplus c_3 z \oplus c_4 xy \oplus c_5 xz \oplus c_6 yz \oplus c_7 xyz.$$

Так как значения многочлена совпадают со значениями функции $f(x,y)$, то получаем:

$$P(000) = c_0 \oplus c_1 0 \oplus c_2 0 \oplus c_3 0 \oplus c_4 00 \oplus c_5 00 \oplus c_6 00 \oplus c_7 000 = c_0 = f(000);$$

$P(001) = c_0 \oplus c_1 0 \oplus c_2 0 \oplus c_3 1 \oplus c_4 00 \oplus c_5 01 \oplus c_6 01 \oplus c_7 001 = c_0 \oplus c_3 = f(001);$
$P(010) = c_0 \oplus c_1 0 \oplus c_2 1 \oplus c_3 0 \oplus c_4 01 \oplus c_5 00 \oplus c_6 10 \oplus c_7 010 = c_0 \oplus c_2 = f(010);$
$P(011) = c_0 \oplus c_1 0 \oplus c_2 1 \oplus c_3 1 \oplus c_4 01 \oplus c_5 01 \oplus c_6 11 \oplus c_7 011 = c_0 \oplus c_2 \oplus c_3 \oplus c_6 =$
$= f(011);$
$P(100) = c_0 \oplus c_1 1 \oplus c_2 0 \oplus c_3 0 \oplus c_4 10 \oplus c_5 10 \oplus c_6 00 \oplus c_7 100 = c_0 \oplus c_1 = f(100);$
$P(101) = c_0 \oplus c_1 1 \oplus c_2 0 \oplus c_3 1 \oplus c_4 10 \oplus c_5 11 \oplus c_6 01 \oplus c_7 101 = c_0 \oplus c_1 \oplus c_3 \oplus c_5 =$
$= f(101);$
$P(110) = c_0 \oplus c_1 1 \oplus c_2 1 \oplus c_3 0 \oplus c_4 11 \oplus c_5 10 \oplus c_6 10 \oplus c_7 110 = c_0 \oplus c_1 \oplus c_2 \oplus c_4 =$
$= f(110);$
$P(111) = c_0 \oplus c_1 1 \oplus c_2 1 \oplus c_3 1 \oplus c_4 11 \oplus c_5 11 \oplus c_6 11 \oplus c_7 111 =$
$= c_0 \oplus c_1 \oplus c_2 \oplus c_3 \oplus c_4 \oplus c_5 \oplus c_6 \oplus c_7 = f(111).$

Имеем систему из восьми булевых уравнений:

$$\begin{cases} c_0 = f(000), \\ c_0 \oplus c_3 = f(001), \\ c_0 \oplus c_2 = f(010), \\ c_0 \oplus c_2 \oplus c_3 \oplus c_6 = f(011), \\ c_0 \oplus c_1 = f(100), \\ c_0 \oplus c_1 \oplus c_3 \oplus c_5 = f(101), \\ c_0 \oplus c_1 \oplus c_2 \oplus c_4 = f(110), \\ c_0 \oplus c_1 \oplus c_2 \oplus c_3 \oplus c_4 \oplus c_5 \oplus c_6 \oplus c_7 = f(111). \end{cases}$$

Решая систему, последовательно определим все коэффициенты многочлена Жегалкина.

Пример. Построить многочлен Жегалкина для функции $f = (11001011)$.

Решение. Запишем систему булевых уравнений:

$$\begin{cases} c_0 = 1, \\ c_0 \oplus c_3 = 1, \\ c_0 \oplus c_2 = 0, \\ c_0 \oplus c_2 \oplus c_3 \oplus c_6 = 0, \\ c_0 \oplus c_1 = 1, \\ c_0 \oplus c_1 \oplus c_3 \oplus c_5 = 0, \\ c_0 \oplus c_1 \oplus c_2 \oplus c_4 = 1, \\ c_0 \oplus c_1 \oplus c_2 \oplus c_3 \oplus c_4 \oplus c_5 \oplus c_6 \oplus c_7 = 1. \end{cases}$$

Будем последовательно находить коэффициенты многочлена. При этом будем учитывать, что сумма по модулю 2 любого четного числа одинаковых слагаемых равна 0.

$$\begin{cases} c_0 = 1, \\ 1 \oplus c_3 = 1, \\ 1 \oplus c_2 = 0, \\ 1 \oplus c_2 \oplus c_3 \oplus c_6 = 0, \\ 1 \oplus c_1 = 1, \\ 1 \oplus c_1 \oplus c_3 \oplus c_5 = 0, \\ 1 \oplus c_1 \oplus c_2 \oplus c_4 = 1, \\ 1 \oplus c_1 \oplus c_2 \oplus c_3 \oplus c_4 \oplus c_5 \oplus c_6 \oplus c_7 = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} c_0 = 1, \\ c_3 = 0, \\ c_2 = 1, \\ 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus c_6 = 0, \\ c_1 = 0, \\ 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus c_5 = 0, \\ 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus c_4 = 1, \\ 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus c_4 \oplus c_5 \oplus c_6 \oplus c_7 = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_0 = 1, \\ c_3 = 0, \\ c_2 = 1, \\ 0 \oplus c_6 = 0, \\ c_1 = 0, \\ 1 \oplus c_5 = 0, \\ 0 \oplus c_4 = 1, \\ 0 \oplus c_4 \oplus c_5 \oplus c_6 \oplus c_7 = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} c_0 = 1, \\ c_3 = 0, \\ c_2 = 1, \\ c_6 = 0, \\ c_1 = 0, \\ c_5 = 1, \\ c_4 = 1, \\ 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus c_7 = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_0 = 1, \\ c_3 = 0, \\ c_2 = 1, \\ c_6 = 1, \\ c_1 = 0, \\ c_5 = 1, \\ c_4 = 1, \\ 0 \oplus c_7 = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} c_0 = 1, \\ c_1 = 0, \\ c_2 = 1, \\ c_3 = 0, \\ c_4 = 1, \\ c_5 = 1, \\ c_6 = 0, \\ c_7 = 1. \end{cases}$$

Запишем многочлен Жегалкина от трех переменных с найденными коэффициентами:

$P(x, y, z) = 1 \oplus 0x \oplus 1y \oplus 0z \oplus 1xy \oplus 1xz \oplus 0yz \oplus 1xyz$ и упростим его:

$P(x, y, z) = 1 \oplus 0 \oplus y \oplus 0 \oplus xy \oplus xz \oplus 0 \oplus xyz$ или, окончательно,

$P(x, y, z) = 1 \oplus y \oplus xy \oplus xz \oplus xyz$.

2. Построение многочлена Жегалкина по СДНФ функции.

Для этого следует:

1) привести функцию к виду СДНФ;
2) в СДНФ дизъюнкцию заменить сложением по модулю 2;
3) заменить отрицание, используя формулу $\bar{x} = x \oplus 1$;
4) раскрыть скобки, пользуясь дистрибутивностью;
5) привести подобные слагаемые, используя формулу $x \oplus x = 0$;
6) упростить полученный многочлен, используя формулу $x \oplus 0 = x$.

Пример. Построить многочлен Жегалкина для функции $f(x,y) = xy \leftrightarrow (\bar{x} \vee y)$.

Решение. Приведем сначала данную функцию к СДНФ:

$$f(x,y) = xy \leftrightarrow (\bar{x} \vee y) = xy(\bar{x} \vee y) \vee \overline{xy} \cdot \overline{\bar{x} \vee y} = xy\bar{x} \vee xyy \vee (\bar{x} \vee \bar{y})(x\bar{y}) =$$

$= 0 \vee xy \vee \bar{x}x\bar{y} \vee \bar{y}x\bar{y} = xy \vee x\bar{y} = x(y \vee \bar{y}) = x1 = x$. Т.к. $f(x,y) = x$, то многочлен Жегалкина совпадает с СДНФ, т.е. $P(x,y) = x$.

Пример. Построить многочлен Жегалкина для функции $f(x,y,z) = x\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z}$.

Решение. Функция представлена в виде СДНФ. Заменим дизъюнкцию сложением по модулю 2: $P(x,y,z) = x\bar{y}z \oplus \bar{x}y\bar{z}$. Заменим отрицание, используя формулу $\bar{x} = x \oplus 1$: $P(x,y,z) = x(y \oplus 1)z \oplus (x \oplus 1)y(z \oplus 1)$. Раскроем скобки, пользуясь дистрибутивностью, и приведем подобные слагаемые:

$P(x,y,z) = x(y \oplus 1)z \oplus (x \oplus 1)y(z \oplus 1) = xyz \oplus xz \oplus (xy \oplus y)(z \oplus 1) = xyz \oplus xz \oplus$
$\oplus xyz \oplus yz \oplus xy \oplus y = xz \oplus yz \oplus xy \oplus y$.

Пример. Построить многочлен Жегалкина для функции $f(x,y,z) = \bar{x} \to (\bar{z} \leftrightarrow (y \oplus xz))$.

Решение. Составим таблицу истинности для заданной функции:

x	y	z	$\bar{x}$	$\bar{z}$	xz	$y \oplus xz$	$\bar{z} \leftrightarrow (y \oplus xz)$	$f(x,y,z)$
0	0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	1	0	1
1	1	1	0	0	1	0	0	1

Запишем СДНФ.

$f(000,011,100,101,110,111) = 1$;

СДНФ$_f = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee xyz$.

Упростим полученную СДНФ, а именно, проведем группировку конъюнкций и вынесем общие элементы за скобки:

$$f=\bar{x}\bar{y}\bar{z}\vee\bar{x}yz\vee x\bar{y}\bar{z}\vee x\bar{y}z\vee xy\bar{z}\vee xyz=\left(\bar{x}\bar{y}\bar{z}\vee x\bar{y}\bar{z}\right)\vee\left(\bar{x}yz\vee xyz\right)\vee x\bar{y}z\vee xy\bar{z}=$$
$$=\bar{y}\bar{z}\left(\bar{x}\vee x\right)\vee yz\left(\bar{x}\vee x\right)\vee x\bar{y}z\vee xy\bar{z}=\bar{y}\bar{z}1\vee yz1\vee x\bar{y}z\vee xy\bar{z}=\bar{y}\bar{z}\vee yz\vee x\bar{y}z\vee xy\bar{z}\cdot$$

Заменим дизъюнкцию сложением по модулю 2:

$$P(x,y,z)=\bar{y}\bar{z}\oplus yz\oplus x\bar{y}z\oplus xy\bar{z}\cdot$$

Заменим отрицание, используя формулу $\bar{x}=x\oplus 1$:

$$P(x,y,z)=\left(y\oplus 1\right)\left(z\oplus 1\right)\oplus yz\oplus x\left(y\oplus 1\right)z\oplus xy\left(z\oplus 1\right)\cdot$$

Раскроем скобки, пользуясь дистрибутивностью, и приведем подобные слагаемые:

$$P\left(x,y,z\right)=yz\oplus y\oplus z\oplus 1\oplus yz\oplus xyz\oplus xz\oplus xyz\oplus xy=xy\oplus xz\oplus y\oplus z\oplus 1.$$

Окончательно, $P\left(x,y,z\right)=xy\oplus xz\oplus y\oplus z\oplus 1$.

3. Построение многочлена Жегалкина по ДНФ функции.

Для этого следует:

1) привести функцию к виду ДНФ;
2) избавиться от всех дизъюнкций с помощью законов де Моргана $x\vee y=\overline{\bar{x}\cdot\bar{y}}$;
3) избавиться от всех отрицаний, используя формулу $\bar{x}=x\oplus 1$;
4) раскрыть скобки, пользуясь дистрибутивностью;
5) привести подобные слагаемые, используя формулу $x\oplus x=0$;
6) упростить полученный многочлен, используя формулу $x\oplus 0=x$.

Пример. Построить многочлен Жегалкина для функции $f\left(x,y,z\right)=x\bar{y}z\vee\bar{x}y\bar{z}$.

Решение. Функция представлена в виде ДНФ. Избавимся от дизъюнкции $f\left(x,y,z\right)=x\bar{y}z\vee\bar{x}y\bar{z}=\overline{\overline{x\bar{y}z}\;\overline{\bar{x}y\bar{z}}}$. Исключим все отрицания, раскроем скобки и упростим:

$$P\left(x,y,z\right)=\left(x\left(y\oplus 1\right)z\oplus 1\right)\left(\left(x\oplus 1\right)y\left(z\oplus 1\right)\oplus 1\right)\oplus 1=\left(xyz\oplus xz\oplus 1\right)\cdot$$
$$\cdot\left(\left(xy\oplus y\right)\left(z\oplus 1\right)\oplus 1\right)\oplus 1=\left(xyz\oplus xz\oplus 1\right)\left(xyz\oplus yz\oplus xy\oplus y\oplus 1\right)\oplus 1=$$
$$=xyz\oplus xyz\oplus xyz\oplus xyz\oplus xyz\oplus yz\oplus xyz\oplus xyz\oplus xy\oplus xyz\oplus xyz\oplus y\oplus xyz\oplus xz\oplus 1\oplus$$
$$\oplus 1=yz\oplus xy\oplus xz\oplus y.$$

Итак, $P\left(x,y,z\right)=yz\oplus xy\oplus xz\oplus y$.

Пример. Построить многочлен Жегалкина для функции $f\left(x,y,z\right)=\left(x\downarrow z\right)\leftrightarrow\left(z\oplus\left(x\vee y\right)\right)$.

Приведем функцию к ДНФ:

$$f\left(x,y,z\right)=\left(x\downarrow z\right)\leftrightarrow\left(z\oplus\left(x\vee y\right)\right)=\left(x\downarrow z\right)\left(z\oplus\left(x\vee y\right)\right)\vee\overline{x\downarrow z}\;\overline{z\oplus\left(x\vee y\right)}=$$
$$=\overline{x\vee z}\left(z\,\overline{x\vee y}\vee\bar{z}\left(x\vee y\right)\right)\vee\left(x\vee z\right)\left(z\leftrightarrow\left(x\vee y\right)\right)=\bar{x}\bar{z}\left(z\bar{x}\bar{y}\vee\bar{z}x\vee\bar{z}y\right)\vee$$

$\vee (x \vee z)\big(z(x \vee y) \vee \bar{z}\,\overline{x \vee y}\big) = (0 \vee 0 \vee \bar{x}y\bar{z}) \vee (x \vee z)(zx \vee zy \vee \bar{z}\ \bar{x}\ \bar{y}) = \bar{x}y\bar{z} \vee xz \vee xyz \vee$
$\vee\, 0 \vee zx \vee zy \vee 0 = \bar{x}y\bar{z} \vee xyz \vee xz \vee yz = \bar{x}y\bar{z} \vee xz \vee yz$.

Итак, функция в виде ДНФ имеет вид $f(x, y, z) = \bar{x}y\bar{z} \vee xz \vee yz$. Избавимся от дизъюнкций: $f(x, y, z) = \overline{\overline{\bar{x}y\bar{z}}\;\overline{xz}\;\overline{yz}}$. Исключим все отрицания, раскроем скобки и упростим:

$$P(x, y, z) = ((x \oplus 1)y(z \oplus 1) \oplus 1)(xz \oplus 1)(yz \oplus 1) \oplus 1 =$$
$$\cdot ((xy \oplus y)(z \oplus 1) \oplus 1)(xz \oplus 1)(yz \oplus 1) \oplus 1 = (xyz \oplus yz \oplus xy \oplus y \oplus 1)(xyz \oplus xz \oplus yz \oplus 1) =$$
$$= xyz \oplus xyz \oplus xyz \oplus xyz \oplus xyz \oplus xyz \oplus xyz \oplus xyz \oplus xyz \oplus xz \oplus xyz \oplus yz \oplus xyz \oplus$$
$$\oplus\, yz \oplus yz \oplus xyz \oplus yz \oplus xy \oplus y \oplus 1 = xz \oplus xy \oplus y \oplus 1.$$

Окончательно, $P(x, y, z) = xy \oplus xz \oplus y \oplus 1$.

4. Построение многочлена Жегалкина по таблице истинности функции.

В этом случае столбец значений булевой функции выписывается в строку. Под ней формируется строка, значения которой являются суммой по модулю 2 двух ближайших значений предыдущей строки. Остальные строки формируются по тому же принципу. Последняя строка будет состоять из единственного значения, а вся таблица будет иметь вид равнобедренного треугольника.

Многочлен Жегалкина составляется из тех слагаемых, в чьих строках имеется единица на левом боковом ребре треугольника, а каждое слагаемое является конъюнкцией тех переменных, в чьих позициях в данной строке таблицы истинности стоят единицы. Нулевому набору значений соответствует слагаемое 1.

Пример. Построить многочлен Жегалкина для функции $f(x, y, z) = x\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z}$.

Составим таблицу истинности заданной функции:

x	y	z	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$	$x\bar{y}z$	$\bar{x}y\bar{z}$	$f(x, y, z)$	
0	0	0	1	1	1	0	0	0	00100100
0	0	1	1	1	0	0	0	0	0110110
0	**1**	0	1	0	1	0	1	1	**1**01101
0	**1**	**1**	1	0	0	0	0	0	**1**1011
1	0	0	0	1	1	0	0	0	0110
1	0	**1**	0	1	0	1	0	1	**1**01
1	**1**	0	0	0	1	0	0	0	**1**1
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0

Итак, $P(x,y,z) = y \oplus yz \oplus xz \oplus xy$.

Преимущество представления булевой функции многочленом Жегалкина заключается в том, что все преобразования выполняются подобно преобразованиям в классической алгебре, за исключением того, что $x \cdot x = x$, т.е. в многочленах Жегалкина отсутствуют степени, и $x \oplus x = 0$, т.е. отсутствуют коэффициенты, отличные от 0 и 1.

Недостатком является громоздкость при большом количестве переменных.

Определение. Булева функция называется **линейной**, если она может быть представлена многочленом Жегалкина, который содержит только слагаемые нулевой и первой степени, и не содержит конъюнкций разных переменных.

Так, например, функция $f(x,y,z) = x\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z}$ не является линейной, поскольку представляющий ее многочлен Жегалкина $P(x,y,z) = y \oplus yz \oplus xz \oplus xy$ содержит, в том числе, слагаемые второй степени xy, xz, yz.

Пример. Докажите линейность функции $f(x,y) = x \leftrightarrow y$.

Решение. Построим многочлен Жегалкина по СДНФ функции. $f(x,y) = x \leftrightarrow y = xy \vee \bar{x}\bar{y}$. Тогда $P(x,y) = xy \oplus (x \oplus 1)(y \oplus 1) = xy \oplus xy \oplus x \oplus y \oplus \quad \oplus 1 = x \oplus y \oplus 1$. Так как многочлен Жегалкина $P(x,y) = x \oplus y \oplus 1$ содержит только слагаемые нулевой и первой степени, то функция $f(x,y) = x \leftrightarrow y$ является линейной.

Среди элементарных булевых функций линейными являются константы 0 и 1, отрицание, эквиваленция, сложение по модулю 2. Предлагаем убедиться в этом самостоятельно.

Пример. Выясните, является ли функция $f(x,y,z) = \bar{x} \vee y \oplus yz(x \vee z)$ линейной.

Решение. Построим многочлен Жегалкина, воспользовавшись таблицей истинности данной функции:

x	y	z	$\bar{x}$	$\bar{x} \vee y$	$x \vee z$	yz	$yz(x \vee z)$	$f(x,y,z)$	
0	0	0	1	1	0	0	0	1	**1**1100010
0	0	1	1	1	1	0	0	1	0010011
0	1	0	1	1	0	0	0	1	011010
0	**1**	**1**	1	1	1	1	1	0	**1**0111
1	0	0	0	0	1	0	0	0	**1**100
1	0	1	0	0	1	0	0	0	010

1	**1**	0	0	1	1	0	0	1	**1**1
1	1	1	0	1	1	1	1	0	0

$P(x,y,z)=1\oplus x\oplus yz\oplus xy$. Так как полученный многочлен содержит конъюнкции xy и yz, то функция $f(x,y,z)$ не является линейной.

Вопросы для самоконтроля.

1. Дайте определение сложения по модулю 2.
2. Перечислите свойства сложения по модулю 2.
3. Какая система функций образует базис Жегалкина?
4. Как выражается отрицание и дизъюнкция в базисе Жегалкина?
5. Дайте определение многочлена Жегалкина.
6. Сформулируйте теорему Жегалкина.
7. Дайте определение линейной функции.
8. Какие из элементарных булевых функций обладают свойством линейности?

Задания и упражнения.

1. Для следующих булевых функций найдите различными способами представляющий их многочлен Жегалкина:

а) $f(x,y)=\bar{x}\downarrow(xy\to\bar{y})$;

б) $f(x,y)=(x\vee y)\oplus(x\mid y)$;

в) $f(x,y,z)=\bar{x}(y\bar{z}\vee\bar{y}z)$;

г) $f(x,y,z)=(x\to(y\to z))(\bar{z}y\to x)$;

д) $f(x,y,z)=(x\oplus 1)(y\oplus 1)\bar{z}\vee yz$;

е) $f(x,y,z)=\overline{x}\overline{y}z\vee x\overline{z}$;

ж) $f(x,y,z)=x(y\to z)\vee(\bar{x}y\vee x\bar{y})(z\oplus 1)$;

з) $f=(11010010)$;

и) $f=(00011111)$.

2. Выясните, какие из следующих функций линейны:

а) $f(x,y,z)=\overline{xy\to z}\vee(x\vee y)(\bar{x}\vee\bar{y})(z\oplus 1)$;

б) $f(x,y,z)=\bar{x}\to(y\vee\bar{z})$;

в) $f(x,y,z)=(y\bar{z}\oplus x)\to(x\leftrightarrow x\bar{y})$;

г) $f(x,y,z)=(x\vee z\leftrightarrow y)\mid(yz\oplus z)$;

д) $f(x,y,z)=(x\to y)\vee(x\oplus(y\leftrightarrow z))$;

е) $f=(11100011)$;

ж) $f = (01101001)$;

з) $f = (10100010)$;

и) $f = (11000011)$.