«МАТЕМАТИКА БЕЗ ФОРМУЛ»

Студент группы 1П-20 Лысенко А. Г.
Научный руководитель Захаров В. В.

Аннотация:

В 21 веке, в веке бурного развития информационных технологий, умственная деятельность многих подростков становится менее активной. Кроме того, многие люди, несклонные к точным наукам, недолюбливают бесконечные математические формулы, расчеты, тем более не понимают, как их можно использовать в повседневной обыденно-хозяйской деятельности. В данной работе мы решили представить: Что произойдет, если из математики убрать формулы? И попытаться ввести математические понятия не строгими математическими формулировками, а использовать понятийный аппарат, воспринимаемый далеко «нематематиками».

Практическое значение работы: материалы могут быть использованы в учебном процессе или во внеаудиторной работе для повышения качества знаний, что позволяет раскрыть и развить потенциал каждого студента.

Формулы в математике были придуманы, как это не странно, чтобы облегчить занятия этой самой математикой, однако учащиеся не могут в это поверить до сих пор.

В древней, например, Индии, Египте хорошо обходились без формул. И, как сейчас говорят, конкретно строили логические выводы. И арабы когда-то занимались математикой без формул и «сладкозвучные поэмы писали про квадрат суммы»…

Сегодня же математику бояться и, как следствие, не любят многие. Боятся, прежде всего, из-за множества формул.

Формулы, конечно, создают для математика великое облегчение, но для «нематиматиков» наоборот – лишь преграду к пониманию данной науки.

И каково же было мое удивление, когда, углубившись в данный вопрос, я поняла простую истину – «Математические формулы — лишь удобный язык для изложения идей и методов математики. Сами же эти идеи можно описать, используя привычные и наглядные образы из окружающей жизни».

Поэтому проблематикой для исследовательской работы был выбран наболевший вопрос – А ВОЗМОЖНО ЛИ ВЫУЧИТЬ МАТЕМАТИКУ БЕЗ ФОРМУЛ?!

Ещё одним весомым аспектом в выборе темы считаю то, что она может значительно улучшить понимание математики студентами тех специальностей и направлений, для которых она является не областью профессиональной деятельности, а средством для решения практических задач.

В данной же работе мы исследовали подход – «изучение без формул» к таким разделам математики как:

- ✓ Последовательности и ряды;
- ✓ Функции и их свойства;
- ✓ Дифференциальное и интегральное исчисление.

Но в качестве обзора работы возьмем первую, и может быть самую «туманную» для студенчества, тему последовательностей и пределов.

Давайте вспомним, как звучат классические определения данных понятий:

Определение: Числовой последовательностью называется бесконечное множество чисел

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \quad (1),$$

следующих одно за другим в определенном порядке и построенных по определенному закону, с помощью которого a_n задается как функция целочисленного аргумента n, т.е. $f(n) = a$.

Определение: Число А называется пределом последовательности (1), если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N = N(\varepsilon)$, такое, что при $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$. Если число А есть предел последовательности (1), то пишут:

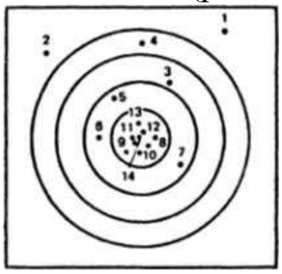
$$\lim_{n\to\infty} a_n = A.$$

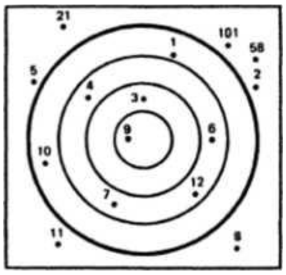
Числовая последовательность не может иметь более одного предела. Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся.

А теперь постараемся ввести эти понятия на понятном для гуманитариев языке.

Представим что мы в тире. С огневого рубежа стрелки посылают пулю за пулей — каждый в свою мишень.

Следя за тем, как мишени покрываются пробоинами, нетрудно отличить меткого стрелка от неопытного. Мастера заметишь сразу, даже если ему досталась непристрелянная винтовка. И пусть несколько первых выстрелов будут неудачными. Все же начиная с некоторой, пробоины уже не выйдут за границы белого круга мишени. Проследим дальше, и мы дождемся выстрела, после которого пробоины не выйдут и за границы яблочка. А вот уже все без исключения они ложатся внутрь шестерки… внутрь семерки… восьмерки… девятки… (рис. Слева).





А как успехи у соседнего стрелка? Там все наоборот. Сколько ни наблюдай, он то и дело посылает пули в молоко (рис. справа). Ясно — оружие в неопытных руках.

Если попытаться эти соревнования по стрельбе рассмотреть глазами математика, то, пожалуй, найдутся здесь удачные образы для разговора о последовательностях, пределах, сходимости.

Итак, каждую пробоину, разумеется, представим не как рваное пятно, а как точку. Сужающиеся круги мишени не закончим на десятке, а домыслим располагающиеся внутри нее еще меньшие, неограниченно сужающиеся круги. Математик повел бы строгий счет выстрелам, и каждую пробоину отмечал бы своим номером. Перенумерованные элементы множества пробоин математик назвал бы членами последовательности. Впрочем, этот термин математик употребил бы лишь после того, как убедился, что соревнования будут продолжаться неограниченно долго. Последовательностью, подчеркнул бы математик, называется бесконечное множество перенумерованных элементов. Последовательность считается заданной, если известен закон ее образования, то есть правило, согласно которому по любому названному номеру можно указать член последовательности с таким номером.

Удовлетворив таким образом профессиональную тягу к строгости, математик приступил бы к наблюдениям за ходом соревнований.

Наблюдая за опытным стрелком, математик отметил бы: какой малый круг ни возьми, начиная с некоторого выстрела, все последующие пробоины ложатся внутрь этого круга. Это значит, сказал бы математик, что последовательность пробоин стремится, или сходится, к центру мишени, что центр мишени есть предел последовательности пробоин.

Наблюдая за неопытным стрелком, математик очертил бы вокруг центра мишени круг некоторого радиуса, такой, что какой номер ни загадай, найдется пробоина с большим номером, лежащая за пределами этого рокового круга. Это значит, сказал бы математик, что последовательность пробоин не стремится, не сходится к центру круга.

Снова тир.

Мишени сняты со щитов и положены на стол. Но положены обратной стороною вверх. Каждая пробоина аккуратно отмечена своим номером. Можно ли теперь отличить мишень опытного стрелка от мишени неопытного? Можно ли определить, сходится ли последовательность пробоин к некоторому пределу или, напротив, не сходится ни к какому, иначе говоря, расходится? Существует ли безошибочный критерий сходимости?

Да, существует. Он называется критерием Коши, по имени математика, указавшего его впервые. И это действительно безошибочный критерий. Он выполняется, если последовательность сходится. Он не выполняется, если последовательность расходится.

Критерий Коши прост. Загадайте любое расстояние. Теперь постарайтесь подыскать такой номер, чтобы расстояние между любыми двумя пробоинами с большими номерами было бы меньше загаданного. Если вам это будет удаваться всегда, какое малое расстояние вы ни загадаете, это и означает, что последовательность удовлетворяет критерию Коши. А раз удовлетворяет, то, стало быть, сходится к некоторому пределу.

Но каков же он, этот предел? Спрашивать так — значит требовать от критерия Коши больше, чем он может дать. Он безошибочно подтверждает существование предела — и только. Что это за предел, надо еще поискать. Однако уверенность, что искомое существует, часто облегчает поиск.

Заметим, что последовательность, удовлетворяющая критерию Коши, называется фундаментальной.

А можно ли с помощью замечательного критерия опознать расходящуюся последовательность?

Да, можно.

Легко заметить сходство между формулировкой критерия Коши и определением предела. По сходству, по аналогии с отрицанием сходимости можно построить предписание, которое позволило бы безошибочно уличить в расходимости расходящуюся последовательность.

Здесь тоже нужно подыскать некоторое контрольное расстояние, такое, что какой номер ни загадывай, всегда найдутся две пробоины с бОльшими номерами, удаленные друг от друга на расстояние больше контрольного. Такая последовательность не фундаментальна, стало быть, она не сходится ни к какому пределу, иначе говоря, расходится.

Рассмотрим ещё один из примеров «нематематического» объяснения математических понятий.

Вполне житейский и всеми понятный вопрос - существует ли предел спортивных возможностей человека?

Оспаривать их ограниченность не станет никто. Но вместе с тем мы знаем, что вечных рекордов не бывает. Еще недавно мечтой спринтеров было пробежать сто метров за десять секунд — и вот заветный рубеж уже преодолен. И в то же время нельзя всерьез утверждать, что какой-нибудь будущий рекордсмен пробежит стометровку за время, меньшее двух или одной секунды...

Разобраться в этом запутанном вопросе на первый взгляд нелегко. А между тем, ставя его, мы употребили несколько слов, которые помогут нам внести в каверзную проблему поистине математическую ясность.

Это, во-первых и прежде всего, слово «предел». Надежным основанием наших дальнейших рассуждений послужит теория последовательностей. Мы будем рассматривать рекордные результаты в беге на сто метров как члены некоторой последовательности.

Это, во-вторых, слово «меньше». Члены нашей последовательности — числа, их можно сравнивать по величине.

Это, в-третьих, слово «ограниченность». Утверждая, что никто не сможет пробежать стометровку быстрее, чем, скажем, за две секунды, мы заявили, что члены нашей числовой последовательности ограничены снизу, то есть что существует число, меньшее любого члена нашей последовательности.

Это, в-четвертых, слово «рекорд». Рекорд считается таковым лишь в том случае, когда он превосходит предыдущее достижение. Очередной рекордный результат в беге на сто метров должен быть меньше прежнего. В этом выражается существенная особенность нашей последовательности: математик назвал бы ее монотонно убывающей, имея под этим в виду, что каждый последующий ее член меньше предыдущего.

Вот теперь все готово для решающего утверждения. В теории последовательностей есть теорема: всякая монотонно убывающая и ограниченная снизу числовая последовательность имеет предел.

Это значит, что на шкале результатов в беге на сто метров есть отметка, к которой стремится последовательность рекордных достижений. Какую малую окрестность этой отметки ни взять, все члены последовательности, начиная с некоторого, будут лежать в этой окрестности. Заметим, что это вовсе не противоречит утверждению о том, что вечных рекордов не бывает, ведь последовательность рекордов может стремиться к своему пределу, не достигая его. Если нынешний рекорд отличается от предела на десятую долю секунды, то следующий может отличаться на пять сотых, следующий за ним — на одну сотую, следующий — на пять тысячных... и каждый очередной результат будет рекордом, поскольку он меньше предыдущего. Нужно только замерять время с точностью до все более мелких долей секунды.

В заключение напомним, что в своих рассуждениях мы основывались на теореме о существовании предела для всякой монотонно убывающей и ограниченной снизу числовой последовательности. Есть также теорема о том, что предел имеет всякая монотонно возрастающая и ограниченная сверху последовательность. Эту теорему мы применили бы, если бы подвергли математическому разбору, например, рекорды штангистов.

Вот так легко и доступно можно ввести основные математические понятия.

И в заключении хотелось отметить, что математика – это особый мир, в котором конечно же ведущую роль играют формулы. Однако данной работой мы показали: что произойдет, если из математики убрать формулы. И сделали вывод - многие люди, несклонные к точным наукам, недолюбливающие бесконечные математические формулы, расчеты, становятся «чуть более математиками» если начинают понимать, как эти непонятные на первый взгляд математические понятия можно использовать в повседневной обыденно-хозяйской деятельности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пухначев Ю. В., Попов Ю. П. Математика без формул. Книга 1/ Пухначев Ю. В., Попов Ю. П. – М.: ЛЕНАНД, 2015.-232 с.

2. Пухначев Ю. В., Попов Ю. П. Математика без формул. Книга 2/ Пухначев Ю. В., Попов Ю. П. – М.: Либроком, 2015.-240 с.

3. Перельман Я. И. Занимательная алгебра/ М.: Книговек, 2015.- 271 с.