Лекция №6. Полнота функций алгебры логики. Теорема Поста.

Цели:

знать: способы задания элементарных булевых функций и их определение.

уметь: использовать булевы функции для решения задач логического характера.

развить способность: к решению задач, осуществлению поиска информации.

Основные термины: классы булевых функций, полные системы функций, базис пространства булевых функций, теорема Поста, замкнутые классы.

План:

1. Полнота системы булевых функций.
2. Классы булевых функций. Критерий Поста.
3. Исследование систем булевых функций на полноту.

Изложение материала.

В современной цифровой вычислительной машине цифрами являются 0 и 1. Следовательно, команды, которые выполняет процессор, суть булевы функции. Ранее было доказано, что любая булева функция реализуется через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание. Следовательно, можно построить нужный процессор, имея в распоряжении элементы, реализующие конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание. Попытаемся ответить на вопрос: существуют ли (и если существуют, то какие) другие системы булевых функций, обладающих тем свойством, что с их помощью можно выразить все другие функции.

Определение 6.1. Система F булевых функций называется **функционально полной**, если любая булева функция может быть представлена формулой над F, т.е. является суперпозицией булевых функций из F.

Говорят, что функционально полная система F булевых функций образует **базис** пространства булевых функций. Базис F называется **минимальным**, если удаление из него любой функции превращает эту систему в неполную.

Как известно, любая булева функция может быть представлена в дизъюнктивной нормальной форме и конъюнктивной нормальной форме. Значит, система булевых функций $\{\neg, \wedge, \vee\}$ согласно определению 2.1 является функционально полной. Базис $\{\neg, \wedge, \vee\}$ называется **стандартным.**

В соответствии с законом де Моргана дизъюнкцию можно выразить через конъюнкцию и отрицание: $x_1 \vee x_2 \equiv \overline{\overline{x}_1 \overline{x}_2}$. Следовательно, система функций $\{\neg, \wedge\}$ является функционально полной.

Аналогично, в соответствии с законом де Моргана конъюнкцию можно выразить через дизъюнкцию и отрицание: $x_1 x_2 \equiv \overline{\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2}$. Следовательно, система функций $\{\neg, \vee\}$ является функционально полной.

Функционально полными также являются системы, состоящие только из одной функции: $\{\,|\,\}$ (штрих Шеффера), $\{\downarrow\}$ (стрелка Пирса). Действительно, в первом случае

$\overline{x_1} \equiv x_1 \,|\, x_1$ (см. таблицу);

x_1	$\overline{x_1}$	$x_1 \,\|\, x_1$
0	1	1
1	0	0

$$x_1 x_2 \equiv \overline{\overline{x_1 x_2}} \equiv \overline{x_1 \,|\, x_2} \equiv (x_1 \,|\, x_2) \,|\, (x_1 \,|\, x_2);$$

$$x_1 \vee x_2 \equiv \overline{\overline{x}_1 \overline{x}_2} \equiv \overline{x_1} \,|\, \overline{x_2} \equiv (x_1 \,|\, x_1) \,|\, (x_2 \,|\, x_2).$$

Во втором случае

$\overline{x_1} \equiv x_1 \downarrow x_1$ (см. таблицу);

x_1	$\overline{x_1}$	$x_1 \downarrow x_1$
0	1	1
1	0	0

$$x_1 x_2 \equiv \overline{\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2} \equiv \overline{x}_1 \downarrow \overline{x}_2 \equiv (x_1 \downarrow x_1) \,|\, (x_2 \downarrow x_2);$$

$$x_1 \vee x_2 \equiv \overline{\overline{x_1 \vee x_2}} \equiv \overline{x_1 \downarrow x_2} \equiv (x_1 \downarrow x_2) \downarrow (x_1 \downarrow x_2).$$

Рассмотрим систему функций $\{\oplus, \wedge, 1\}$. Чтобы доказать ее полноту представим каждый элемент стандартного базиса формулой над базисом $\{\oplus, \wedge, 1\}$

$\overline{x_1} \equiv x_1 \oplus 1$; $x_1 \vee x_2 \equiv x_1 x_2 \oplus x_1 \oplus x_2$.

Докажите эти равносильности самостоятельно с помощью таблиц истинности.

Базис $\{\oplus, \wedge, 1\}$ называется **базисом Жегалкина**.

Введем в рассмотрение ряд классов функций.

1. **Класс T_0 функций, сохраняющих константу 0**, т. е. таких функций $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, что $f(0,0,\ldots,0) = 0$. Например, $f(x_1, x_2) = x_1 \vee \overline{x_1} x_2$.

x_1	x_2	$\overline{x_1}$	$\overline{x_1}\, x_2$	$x_1 \vee \overline{x_1} x_2$

0	0	1	0	0

2. **Класс** T_1 **функций, сохраняющих константу 1**, т. е. таких функций $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, что $f(1,1,...,1) = 1$. Например, $f(x_1, x_2) = x_1 \vee \overline{x_1 x_2}$.

x_1	x_2	$x_1 x_2$	$\overline{x_1 x_2}$	$x_1 \vee \overline{x_1 x_2}$
1	1	1	0	1

Так, например, функция $f = (0,1,1,1,0,0,1,1)$ сохраняет константу 0 и константу 1. Отрицание не сохраняет ни константу 0, ни константу 1.

Определение 6.2. Функция f^* называется **двойственной** по отношению к функции f, если $f^*(x_1, x_2, ..., x_n) = \overline{f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n})}$.

Так, функцией, двойственной к $f(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$, является функция $f^*(x_1, x_2) = x_1 x_2$, поскольку $f^*(x_1, x_2) = x_1 x_2 = \overline{\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2} = \overline{f(\overline{x}_1, \overline{x}_2)}$.

Константа 0 является двойственной константе 1, т.к. $0 = \overline{\overline{0}} = \overline{1}$, и наоборот.

Стрелка Пирса есть двойственной к штриху Шеффера и наоборот, так как

$$x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1}\,\overline{x_2} = \overline{\overline{x_1}\,|\,\overline{x_2}}.$$

Эквиваленция двойственна сложению по модулю 2, так как

$$x_1 \leftrightarrow x_2 = \overline{x_1 \oplus x_2} = \overline{\overline{x_1} \oplus \overline{x_2}}.$$

Отметим, что для получения таблицы истинности двойственной функции достаточно в таблице истинности исходной функции заменить значения всех переменных на противоположные, т.е. все единицы заменить на нули, а нули – на единицы.

Определение 6.3. Функция f называется **самодвойственной**, если она является двойственной самой себе, т.е. $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \overline{f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n})}$.

Функция самодвойственна тогда и только тогда, когда на взаимно противоположных наборах значений переменных она принимает противоположные значения.

Так, функция $f = (0101)$ является самодвойственной, так как $f(0,0) = 0 = \overline{f}(\overline{0}, \overline{0}) = \overline{f}(1,1) = \overline{1} = 0$, $f(0,1) = 1 = \overline{f}(\overline{0}, \overline{1}) = \overline{f}(1,0) = \overline{0} = 1$.

Функция $f = (1001)$ (эквиваленция) не является самодвойственной, поскольку $f(0,0) = 1 \neq \overline{f}(\overline{0}, \overline{0}) = \overline{f}(1,1) = \overline{1} = 0$.

3. **Класс** S **самодвойственных функций**, т. е. таких функций $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, что $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \overline{f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n})}$.

4. **Класс** L **линейных функций**, т.е. таких функций $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, которые могут быть представлены в виде $f(x_1, x_2, ..., x_n) = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$, где коэффициенты c_i, $i = 0;1;...;n$ принимают значения 0 или 1.

5. **Класс** M **монотонных функций.** На множестве наборов из нулей и единиц $B^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_i \in \{0;1\}, i = 1;2;...;n\}$ введем частичный порядок следующим образом: $(a_1, a_2, ..., a_n) \le (b_1, b_2, ..., b_n)$ тогда и только тогда, когда $a_1 \le b_1$, $a_2 \le b_2, ..., a_n \le b_n$.

Определение 6.4. Функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется **монотонной**, если для любых двух элементов из B^n, таких, что $(a_1, a_2, ..., a_n)$ $\le (b_1, b_2, ..., b_n)$ следует, что $f(a_1, a_2, ..., a_n) \le f(b_1, b_2, ..., b_n)$.

Так , функция $f = (0011)$ монотонна, поскольку $f(00) \le f(01) \le f(10) \le$ $\le f(11)$. Штрих Шеффера – немонотонная функция, так как $(00) \le (11)$, а $f(00) = 1 \ge f(11) = 0$.

Определение 6.5. Классы T_0, T_1, S, L, M называются **классами Поста.**

Теорема 6.1 (критерий Поста). Система F булевых функций является полной тогда и только тогда, когда F целиком не содержится ни в одном из классов Поста.

В таблице приведены свойства, которыми обладают элементарные булевы функции (символ + отмечает свойство, которым обладает данная функция).

Таблица

Свойства элементарных булевых функций.

Название	Обоз-начение	Не сохранимость кон-станты 0	Не сохранимость кон-станты 1	Не само-двойствен-ность	Не линей-ность	Не монотон-ность
Константа 0	0		+	+		
Константа 1	1	+		+		
Отрицание	$\neg$	+	+			+
Конъюнкция	$\wedge$			+	+	
Дизъюнкция	$\vee$			+	+	
Импликация	$\to$	+		+	+	+
Эквивалентность	$\leftrightarrow$	+		+		+
Сумма по модулю 2	$\oplus$		+	+		+
Штрих Шеффера	$\mid$	+	+	+	+	+
Стрелка Пирса	$\downarrow$	+	+	+	+	+

Используя теорему Поста и вышеприведенную таблицу можно строить базисы из элементарных функций по следующему правилу: выбрав любую элементарную булеву функцию и дополнив ее при необходимости другими функциями так, чтобы все они вместе удовлетворяли теореме о функциональной полноте. Через функции этого базиса можно выразить все другие булевы функции.

Пример. Запишите функцию $f = x_1 \leftrightarrow (x_2 \oplus x_3)$ в базисе $\{\neg, \wedge, \vee\}$.

Решение. $f = x_1 \leftrightarrow (x_2 \oplus x_3) = x_1(x_2 \oplus x_3) \vee \bar{x}_1 \overline{x_2 \oplus x_3} = x_1 \overline{x_2 x_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3} \vee$
$\vee\, \bar{x}_1(x_2 \leftrightarrow x_3) = x_1 \overline{x_2 x_3}\, \overline{\bar{x}_2 \bar{x}_3} \vee \bar{x}_1(x_2 x_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3)$.

Определение 2.6. Система F булевых функций называется замкнутой, если любая формула над F представляет некоторую функцию из F.

Фундаментальным свойством каждого класса Поста является его замкнутость (в смысле определения 2.6).

Чтобы исследовать полноту конкретной системы $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ булевых функций, используют критериальную таблицу:

	T_0	T_1	S	L	M
f_1	+/–	+/–	+/–	+/–	+/–
f_2	+/–	+/–	+/–	+/–	+/–
…	+/–	+/–	+/–	+/–	+/–
f_n	+/–	+/–	+/–	+/–	+/–

Строки таблицы соответствуют функциям исследуемой системы, а столбцы – классам Поста. Знак + означает, что функция не принадлежит соответствующему классу Поста.

Пусть, например, $F = \{\leftrightarrow, \vee, 0\}$. На основании таблицы свойств элементарных булевых функций заполненная критериальная таблица имеет вид:

	T_0	T_1	S	L	M
$\leftrightarrow$	+	–	+	–	+
$\vee$	–	–	+	+	–
0	–	+	+	–	–

Как видно из таблицы, система F целиком не содержится ни в одном из классов Поста (ни в одном столбце нет всех знаков «–»). Согласно теореме 2.1 система функций является полной.

Исследуем на полноту систему, которая содержит булевы функции, не являющиеся элементарными.

Пусть, например, $F = \{f_1, f_2\}$, где $f_1 = x_1 \bar{x}_2$, $f_2 = \bar{x}_1 \to \bar{x}_2$.

Проверим, какими свойствами обладают данные функции:

1. Сохранимость константы 0.

$f_1(00)=0\cdot\overline{0}=0\cdot 1=0$, т.е. f_1 сохраняет константу 0;

$f_2(00)=\overline{0}\to\overline{0}=1\to 1=1$, т.е. f_2 не сохраняет константу 0.

2. Сохранимость константы 1.

$f_1(11)=1\cdot\overline{1}=1\cdot 0=0$, т.е. f_1 не сохраняет константу 1;

$f_2(11)=\overline{1}\to\overline{1}=0\to 0=1$, т.е. f_2 сохраняет константу 1.

3. Самодвойственность.

$\overline{f_1(\overline{x}_1,\overline{x}_2)}=\overline{\overline{x}_1\overline{\overline{x}}_2}=x_1\vee\overline{x}_2\neq f_1(x_1,x_2)$, т.е. f_1 не самодвойственная.

$\overline{f_2(\overline{x}_1,\overline{x}_2)}=\overline{\overline{\overline{x}}_1\to\overline{\overline{x}}_2}=\overline{x_1\to x_2}=\overline{\overline{x}_1\vee x_2}=x_1\overline{x}_2$; $f_2(x_1,x_2)=\overline{x}_1\to\overline{x}_2=x_1\vee\overline{x}_2$ и $\overline{f_2(\overline{x}_1,\overline{x}_2)}\neq f_2(x_1,x_2)$, т.е. f_2 не самодвойственная.

4. Линейность.

f_1 и f_2 не являются линейными. Объяснение этому будет дано далее .

5. Монотонность.

Составим таблицу истинности для функции $f_1=x_1\overline{x}_2$:

x_1	x_2	$\overline{x}_2$	$x_1\overline{x}_2$
0	0	1	0
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0

Так как $(10)\le(11)$, а $f_1(10)=1\ge f_1(11)=0$, то f_1 не монотонная.

Составим таблицу истинности для функции $f_2=\overline{x}_1\to\overline{x}_2$:

x_1	x_2	$\overline{x}_1$	$\overline{x}_2$	$\overline{x}_1\to\overline{x}_2$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	1	0	0	1

Так как $(00)\le(01)$, а $f_2(00)=1\ge f_2(01)=0$, то f_2 не монотонная.

Заполним критериальную таблицу:

	T_0	T_1	S	L	M
f_1	–	+	+	+	+
f_2	+	–	+	+	+

На основании критерия Поста делаем вывод, что система является функционально полной.

Вопросы для самоконтроля:

1. Какая система булевых функций называется полной?
2. Приведите примеры функционально полных систем.
3. Дайте определение функции, сохраняющей 0.
4. Дайте определение функции, сохраняющей 1.
5. Дайте определение самодвойственной функции.
6. Дайте определение монотонной функции.
7. Дайте определение линейной функции.
8. Сформулируйте критерий Поста.

Задания и упражнения.

1.1. Проверьте, принадлежит ли функция классам T_0, T_1:

а) $\overline{x_1 x_2 x_3 \leftrightarrow x_1}(x_1 \mid x_3)$;

б) $((x_2 \oplus x_1) \leftrightarrow x_3) \downarrow (x_3 \vee x_1 x_2)$;

в) $\overline{(x_1 \downarrow x_2) \oplus x_3} \leftrightarrow \overline{x_3 \vee (x_2 \leftrightarrow x_3)}$.

1.2. Пользуясь принципом двойственности, построить формулу, которая реализует функцию, двойственную заданной:

а) $x_2 \vee x_1 \bar{x}_2$;

б) $(x_1 \vee x_3) \mid (x_2 \to x_1)$;

в) $\overline{x_1 \oplus x_2} \vee ((x_2 \oplus x_3) \leftrightarrow x_1)$.

1.3. Выясните, какие из указанных ниже функций самодвойственны:

а) $\overline{x_1 \to \bar{x}_2}$;

б) $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3$;

в) $((x_1 \to x_2) \oplus 1)(x_3 \oplus 1) \vee x_1 \bar{x}_2 x_3$;

1.4. Выясните, какие из указанных ниже функций монотонны:

а) $x_1 \to (x_1 \leftrightarrow x_2)$;

б) $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \leftrightarrow x_1 \vee x_2$;

в) $(x_2 \oplus x_3) \downarrow (x_1 \mid x_3 x_2)$.

1.5. Выясните принадлежность указанных ниже функций классам Поста (кроме L):

а) $(x_1 \vee \bar{x}_2) \downarrow x_3$;

б) $x_1 \oplus (x_2 \to x_3)$;

в) $x_2 \leftrightarrow \bar{x}_1 \mid x_3$.

1.6.Докажите с помощью критерия Поста, что система функций $\{0;1;x_1x_2;x_1 \oplus x_2 \oplus x_3\}$ образует базис.