РАВНОСИЛЬНОСТЬ ФОРМУЛ ЛОГИКИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Формула называется **тождественно истинной** (или **тавтологией**), если она принимает значение «истина» при любом наборе значений переменных, входящих в формулу.

Формула называется **тождественно ложной** (или **противоречием**), если она принимает значение «ложь» при любом наборе значений переменных, входящих в формулу.

Формула называется **выполнимой**, если она принимает значение «истина» хотя бы при одном наборе значений переменных, входящих в формулу.

Теорема 1. Если формулы A, $A \to B$ являются тавтологиями, то формула B является тавтологией.

Одной из задач логики является установление равносильности логических формул.

Формулы F_1 и F_2 называются **равносильными**, если они принимают одинаковые истинностные значения при любом наборе значений переменных, входящих в формулу. Обозначают: $F_1 \equiv F_2$.

Для доказательства равносильности двух формул достаточно составить их таблицы истинности и убедиться, что они совпадают.

Задача 1. Доказать равносильность формул $F_1 = \overline{A \& B}$ и $F_2 = \overline{A} \vee \overline{B}$.

Решение. Поскольку F_1 и F_2 содержат две логические переменные A и B, то таблица истинности будет содержать $2^2 = 4$ строки.

A	B	$A \& B$	$\overline{A \& B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \vee \overline{B}$
1	1	1	**0**	0	0	**0**
1	0	0	**1**	0	1	**1**
0	1	0	**1**	1	0	**1**
0	0	0	**1**	1	1	**1**

Сравнивая выделенные столбцы таблицы, убеждаемся, что они полностью совпадают, т.е. формулы равносильны: $\overline{A \& B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}$.

Теорема 2. Формулы F_1 и F_2 являются равносильными, если формула $F_1 \leftrightarrow F_2$ является тавтологией.

Справедливость утверждения непосредственно следует из определения эквиваленции.

Равносильность – это бинарное отношение на множестве формул алгебры логики. Отношение равносильности обладает **свойствами** рефлексивности ($F_1 \equiv F_1$), симметричности (если $F_1 \equiv F_2$, то $F_2 \equiv F_1$) и транзитивности (если $F_1 \equiv F_2$ и $F_2 \equiv F_3$, то $F_1 \equiv F_3$).

Построение таблиц истинности в некоторых может оказаться очень громоздким. Поэтому целесообразно осуществить преобразования формул. С этой целью используют **основные равносильности** (**законы алгебры логики**):

1. Законы коммутативности:
   $A \vee B \equiv B \vee A$; $\qquad A \& B \equiv B \& A$.
2. Законы ассоциативности:
   $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$; $\qquad (A \& B) \& C \equiv A \& (B \& C)$.
3. Законы дистрибутивности:
   $(A \& B) \vee C \equiv (A \vee C) \& (B \vee C)$; $\qquad (A \vee B) \& C \equiv (A \& C) \vee (B \& C)$.
4. $A \vee 0 \equiv A$; $\quad A \& 0 = 0$.
5. $A \vee 1 \equiv 1$; $\quad A \& 1 \equiv A$.
6. Закон исключённого третьего:
   $A \vee \overline{A} \equiv 1$
7. Закон противоречия:
   $A \& \overline{A} \equiv 0$.
8. Закон двойного отрицания:
   $\overline{\overline{A}} = A$.
9. Законы идемпотентности:
   $A \vee A \equiv A$; $\qquad A \& A \equiv A$.
10. Законы де Моргана:
    $\overline{A \vee B} \equiv \overline{A} \& \overline{B}$; $\qquad \overline{A \& B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}$.
11. Законы поглощения:
    $A \vee (A \& B) \equiv A$; $\qquad A \& (A \vee B) \equiv A$.
12. Замена импликации:
    $A \to B \equiv \overline{A} \vee B$.
13. Замена эквиваленции:
    $A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \& (B \to A)$.

Применение логических законов позволяет упрощать сложные высказывания, то есть заменять их равносильными, более простыми. При упрощении логических формул, как правило, исключают операции эквиваленции, импликации, штрих Шеффера и стрелку Пирса и осуществляют переход к стандартному базису логических функций, содержащему операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания. При этом добиваются, чтобы отрицания стояли только над отдельными переменными, а сами переменные или их отрицания связывались операциями дизъюнкции и конъюнкции.

Правило подстановки. Пусть F_1 и F_2 - равносильные формулы, содержащие подформулу F. Если подформулу F заменить в обеих формулах на подформулу G, то формулы G_1 и G_2 также будут равносильными: $G_1 \equiv G_2$.

Пример. Из равносильности формул $\overline{A \vee B} \equiv \overline{A} \,\&\, \overline{B}$ вытекает равносильность формул $\overline{(A \to C) \vee B} \equiv \overline{A \to C} \,\&\, \overline{B}$.

Правило замены. Пусть в формуле F_1 выделена подформула F и G - равносильная ей формула: $F \equiv G$. Если подформулу F в формуле F_1 заменить на подформулу G, то полученная формула G_1 будет равносильна формуле F_1 : $F_1 \equiv G_1$.

Пример. Пусть $F = \overline{A \vee B}$, а $G = \overline{A} \,\&\, \overline{B}$. Тогда $\overline{\overline{A \vee B} \to C} \equiv \overline{\left(\overline{A} \,\&\, \overline{B}\right) \to C}$.

Задача 2. Упростить формулу алгебры логики $F = \overline{\overline{A} \to B} \to A \vee B$ двумя способами: а) используя таблицы истинности; б) с помощью равносильных преобразований.

Решение.

а) Учитывая приоритет логических операций, определим порядок действий:

$$F = \overline{{}^{1}\overline{A} \overset{2}{\to} B}^{\,3} \overset{5}{\to} A \overset{4}{\vee} B .$$

Составим таблицу истинности формулы F, последовательно определяя истинность результатов участвующих в ней логических операций. Поскольку F содержит две логические переменные A и B, то таблица истинности будет содержать $2^2 = 4$ строки.

A	B	$\overline{A}$	$\overline{A} \to B$	$\overline{\overline{A} \to B}$	$A \vee B$	$\overline{\overline{A} \to B} \to A \vee B$
0	0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1	1

Сравнивая два последних столбца таблицы, видим, что они полностью совпадают. Значит, формула F равносильна высказыванию $A \vee B$, т.е. $\overline{\overline{A} \to B} \to A \vee B \equiv A \vee B$.

б) Упростим данную формулу с помощью законов логики.

$$F = \overline{\overline{A} \to B} \to A \vee B \overset{12}{\equiv} \overline{\overline{\overline{A} \to B}} \vee A \vee B \overset{8}{\equiv} \left(\overline{A} \to B\right) \vee A \vee B \overset{12}{\equiv} \left(\overline{\overline{A}} \vee B\right) \vee A \vee B \overset{8,2}{\equiv} (A \vee B) \vee (A \vee B) \overset{9}{\equiv} A \vee B.$$

Задача 3. Доказать равносильность формул алгебры логики $F_1 = \overline{A \to B}$ и $F_2 = A \& \overline{B}$ с помощью равносильных преобразований.

Решение. $F_1 = \overline{A \to B} \overset{12}{\equiv} \overline{\overline{A} \vee B} \overset{10}{\equiv} \overline{\overline{A}} \& \overline{B} \overset{8}{\equiv} A \& \overline{B} \equiv F_2$.

ЗАДАНИЯ

Задание №1. Установите, какие из следующих предложений тождественно истинны, тождественно ложны:

а) «Высказывание *A* истинно или ложно»;

б) «Формула *F* тождественно истинна или тождественно ложна»;

в) «Если человек здоров, то он здоров и счастлив»;

г) «Если человек здоров, то он здоров или счастлив»;

д) «Неверно, что число *n* делится на 2 и на 3 тогда и только тогда, когда оно не делится ни на 2, ни на 3».

Задание №2. Выясните с помощью таблиц истинности, являются ли равносильными формулы:

а) $F_1 = (A \& B) \vee (\overline{A} \& B) \vee (A \& \overline{B})$ и $F_2 = A \to B$;

б) $F_1 = X \& (Y \to Z)$ и $F_2 = (\overline{X} \& Y) \vee (X \& Z)$;

в) $F_1 = P \downarrow (Q \leftrightarrow R)$ и $F_2 = \overline{(P \downarrow Q) \leftrightarrow (P \downarrow R)}$.

Задание №3. Докажите или опровергните равносильность формул с помощью законов алгебры логики:

а) $A \& (\overline{A} \vee B) \equiv A \& B$

б) $(X \vee Y) \& (X \vee \overline{Y}) \equiv X$

в) $(A \& B) \vee (\overline{A} \& B) \vee (A \& \overline{B}) \equiv A \to B$

г) $(P \& Q) \to R \equiv (P \& \overline{R}) \to \overline{Q}$

д) $X \& (Y \to Z) \equiv (\overline{X} \& Y) \vee (X \& Z)$

е) $x \oplus y \equiv (x \& \overline{y}) \vee (\overline{x} \& y)$

ж) $P \mid (Q \to R) \equiv (P \mid Q) \to (P \mid R)$

з) $A \to (B \downarrow C) \equiv (A \to B) \downarrow (A \to C)$

Задание №4. Упростите следующие формулы алгебры логики:

а) $(z \& y) \vee (x \& \overline{y} \& z) \vee (\overline{x} \& \overline{y} \& z)$

б) $x \to (y \vee z \vee (y \& z))$

в) $(x \to \overline{y}) \& (x \leftrightarrow y)$

г) $x \to (y \vee z \vee (y \& z))$