НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ФОРМУЛ АЛЕБРЫ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

В классе формул, равносильных данной, существуют формулы, содержащие только операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания. Такую форму представления формулы алгебры высказываний называют нормальной.

Формула, равносильная данной формуле алгебры высказываний, называется **дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ)**, если она содержит конечное число конъюнкций некоторых логических переменных и их отрицаний, соединенных операцией дизъюнкции.

Например, $(P \& Q \& R) \vee (P \& \overline{Q}) \vee (Q \& R) \vee \overline{R}$.

Теорема 1. Любую формулу алгебры высказываний можно привести к виду ДНФ.

Формула, равносильная данной формуле алгебры высказываний, называется **конъюнктивной нормальной формой (КНФ)**, если она содержит конечное число дизъюнкций некоторых логических переменных и их отрицаний, соединенных операцией конъюнкции. Например, $(\overline{P} \vee Q \vee R) \& (P \vee \overline{R}) \& Q$.

Теорема 2. Любую формулу алгебры высказываний можно привести к виду КНФ.

Для каждой формулы алгебры высказываний можно найти множество дизъюнктивных и конъюнктивных нормальных форм.

Приведем алгоритм построения ДНФ и КНФ:

1. Избавиться от всех логических операций, содержащихся в формуле, заменив их основными: конъюнкцией, дизъюнкцией, отрицанием. Это можно сделать, используя следующие равносильности: $X \to Y \equiv \overline{X} \vee Y,\ X \leftrightarrow Y \equiv (\overline{X} \vee Y) \& (X \vee \overline{Y}),\ X \leftrightarrow Y \equiv (X \& Y) \vee (\overline{X} \& \overline{Y})$.
2. Заменить знак отрицания, относящийся к выражениям вида $\overline{X \& Y}$ и $\overline{X \vee Y}$, знаками отрицания, относящимися к отдельным переменным, используя законы де Моргана.
3. Избавиться от знаков двойного отрицания.
4. Применить, если нужно, к операциям конъюнкции и дизъюнкции законы дистрибутивности и поглощения.

Пример 1. Привести формулу $(\overline{X} \& Y \& Z) \to \overline{Z}$ к ДНФ.

Решение. $(\overline{X} \& Y \& Z) \to \overline{Z} \equiv \overline{\overline{X} \& Y \& Z} \vee \overline{Z} \equiv \overline{\overline{X} \& Y} \vee \overline{Z} \vee \overline{Z} \equiv \overline{\overline{X}} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z} \vee \overline{Z} \equiv X \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}$.

Пример 2. Привести формулу $(X \vee \overline{Y}) \to Z$ к КНФ.

Решение. $(X \vee \overline{Y}) \to Z \equiv \overline{X \vee \overline{Y}} \vee Z \equiv \left(\overline{X} \& \overline{\overline{Y}}\right) \vee Z \equiv (\overline{X} \& Y) \vee Z \equiv (\overline{X} \vee Z) \& (Y \vee Z)$.

Как уже было отмечено выше, для каждой формулы алгебры высказываний можно найти множество дизъюнктивных и конъюнктивных нормальных форм. Чтобы исключить эту неоднозначность, формулы на основе их табличного представления записывают в виде совершенных нормальных форм – совершенной дизъюнктивной нормальной формы и совершенной конъюнктивной нормальной формы. Таким образом, формулу алгебры высказываний можно однозначно задать ее таблицей истинности или в виде СДНФ и СКНФ.

Совершенной дизъюнктивной нормальной формой формулы алгебры высказываний называется её ДНФ, при этом:

1) в ДНФ нет одинаковых конъюнкций;
2) ни одна конъюнкция не содержит одновременно двух одинаковых переменных;
3) ни одна конъюнкция не содержит одновременно некоторую переменную и её отрицание;
4) в каждой конъюнкции присутствуют все переменные, входящие в формулу, либо их отрицание.

Например, $(\overline{P} \& Q \& \overline{R}) \vee (P \& \overline{Q} \& R) \vee (P \& Q \& R)$.

Теорема 3 (о полноте СДНФ). Каждая формула алгебры высказываний, отличная от противоречия, может быть представлена в СДНФ единственным образом.

Совершенной конъюнктивной нормальной формой формулы алгебры высказываний называется её КНФ, при этом:

1) в КНФ нет одинаковых дизъюнкций;
2) ни одна дизъюнкция не содержит одновременно двух одинаковых переменных;
3) ни одна дизъюнкция не содержит одновременно некоторую переменную и её отрицание;
4) в каждой дизъюнкции присутствуют все переменные, входящие в формулу, либо их отрицание.

Например, $(P \vee Q \vee \overline{R}) \& (P \vee \overline{Q} \vee R) \& (\overline{P} \vee Q \vee R) \& (\overline{P} \vee \overline{Q} \vee R)$.

Теорема 4 (о полноте СКНФ). Каждая формула алгебры высказываний, отличная от тавтологии, может быть представлена в СКНФ единственным образом.

Совершенные нормальные формы могут быть найдены двумя способами: а) по таблице истинности; б) с помощью равносильных преобразований.

СДНФ составляется на основе таблицы истинности по следующему правилу:

для каждого набора переменных, при котором формула принимает значение «1», записывается конъюнкция, в которой с отрицанием берутся переменные, имеющие значение «0», а затем все полученные конъюнкции соединяют знаками дизъюнкции.

СКНФ составляется на основе таблицы истинности по следующему правилу:

для каждого набора переменных, при котором формула принимает значение «0», записывается дизъюнкция, в которой с отрицанием берутся переменные, имеющие значение «1», а затем все полученные дизъюнкции соединяют знаками конъюнкции.

Пример 3. Привести к СДНФ и СКНФ формулу *F*, заданную следующей таблицей истинности:

P	***Q***	***R***	***F***
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Формула принимает значения «1» для следующих наборов переменных:

P	***Q***	***R***	***F***
0	0	0	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

Запишем конъюнкции, заменяя отрицанием те переменные, которым соответствуют значения «0», и соединим их знаками дизъюнкции: $(P \& Q \& R) \vee (P \& \overline{Q} \& R) \vee (\overline{P} \& Q \& R) \vee (\overline{P} \& \overline{Q} \& \overline{R})$- искомая СДНФ.

Формула принимает значения «0» для следующих наборов переменных:

P	***Q***	***R***	***F***
0	0	1	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

Запишем дизъюнкции, заменяя отрицанием те переменные, которым соответствуют значения «1», и соединим их знаками конъюнкции: $(\overline{P} \vee \overline{Q} \vee R) \& (\overline{P} \vee Q \vee R) \& (P \vee \overline{Q} \vee R) \& (P \vee Q \vee \overline{R})$- искомая СКНФ.

Если условием задачи не оговаривается, в виде СДНФ или СНКФ надо по заданной таблице истинности записать соответствующую ей формулу, то в целях уменьшения затрат и при желании получить более короткую запись формулы следует сравнить количество единичных и нулевых значений формулы, заданной таблично. Если единичных значений меньше, то формулу лучше записать в виде СДНФ, иначе – в виде СНКФ.

Несмотря на различие записей СДНФ и СНКФ, они равносильны по определению равносильных формул, так как будучи записанными по одной и той же таблице истинности, они реализуют одну и ту же формулу. Тем не менее, может оказаться весьма полезным провести на основании законов логики тождественные преобразования как полученной СДНФ, так и СКНФ.

Отметим, что описанный способ нахождения СДНФ и СКНФ по таблице истинности часто бывает трудоемким. В таких случаях для нахождения СДНФ сначала с помощью равносильных преобразований приводим данную формулу к ДНФ, а затем преобразовываем ее конъюнкции с помощью следующих действий:

1) если в конъюнкцию входит некоторая переменная со своим отрицанием, то удаляем эту конъюнкцию из ДНФ;
2) если в конъюнкцию одна и та же переменная входит несколько раз, то все они удаляются, кроме одной;
3) если в какую-либо конъюнкцию не входят некоторые переменные, то для каждой из них в конъюнкцию добавляется формула вида $P \vee \overline{P}$;
4) если в полученной ДНФ имеется несколько одинаковых конъюнкций, то оставляем только одну из них.

Для нахождения СКНФ процесс выглядит аналогично.